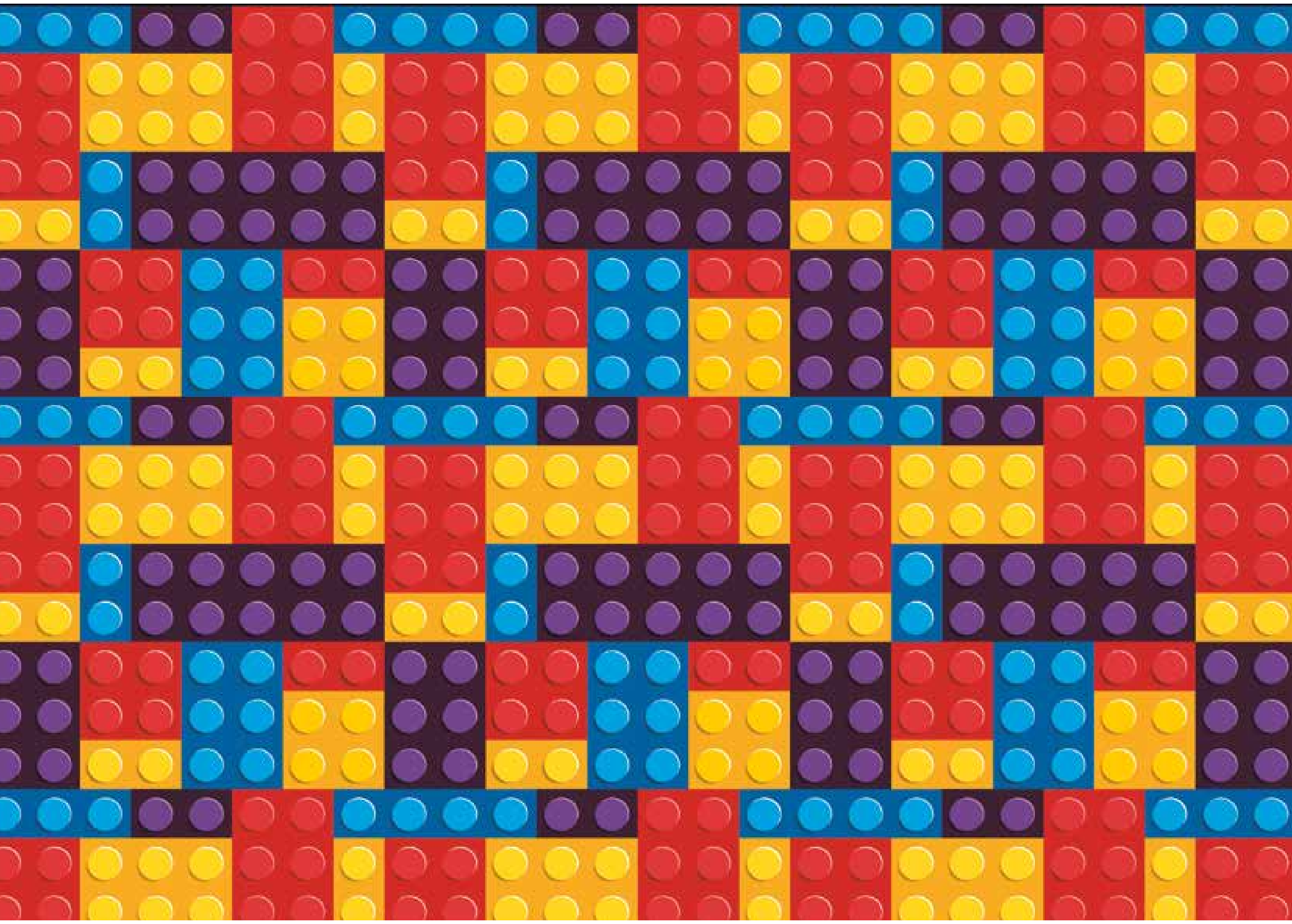
Gesetzmässigkeiten – Muster mathematischen Denkens und Lernens

Text: Florence Weber / we
Fotos: Florence Weber, pixabay.com

Die Schülerinnen und Schüler…

- **können Muster mit Anzahlen bilden, sich Muster einprägen, abdecken und weiterführen.**
- **können Gesetzmässigkeiten im Bereich der natürlichen Zahlen mit Beispielen konkretisieren.**



«Bisher konnte noch nicht bewiesen werden, dass irgendetwas in der Mathematik schwierig ist.»

*Norbert A'Campo (Mathematiker, *1941)*

Muster sind bereits im Leben eines Kleinkindes wichtig, später im Schulunterricht und auch als erwachsene Person trifft man im Alltag immer wieder auf diverse Arten von Mustern: Geometrische Muster, akustische Muster, Bewegungsmuster, Handlungsmuster oder Zahlenmuster seien hier beispielhaft genannt. Hinzu kommt ein mathematisches Verständnis für «gross und klein», «dick und dünn», «lang und kurz» und Tätigkeiten wie messen, vergleichen, ordnen und beobachten.

Muster und Strukturen – Begrifflichkeiten

Die beiden Begriffe, «Muster» und «Struktur» werden häufig synonym verwendet. In einem mathematischen Kontext müssen sie allerdings nicht gleichbedeutend sein. Da die Mathematik als eine Strukturwissenschaft angesehen wird, ist der Begriff «Muster» genauer zu untersuchen.
Muster werden oftmals als geordnet, wiederholt, regelmässig oder vorhersehbar beschrieben. Die zu erklärende Ordnung des Musters und die Beziehungen zwischen den verschiedenen Bestandteilen eines Musters sind folglich die Strukturen. Muster und Strukturen werden unter anderem mit Regelmässigkeit oder Gesetzmässigkeit übersetzt und können von einfach bis hochkomplex sein.

Muster sind Gedächtnishilfen

Um Muster zu erkennen, müssen sie durchschaubar, die Logik der Strukturen muss erkennbar sein. Wenn diese Muster erfasst und erkannt werden, dann entlastet dies das Gedächtnis. Wenn zum Beispiel Zahlen, geometrische Bilder ohne irgendeine Verbindung betrachtet werden, arbeitet das Gedächtnis hochleistungsverdächtig. Das Zusammenfassen und das damit verbundene Strukturieren von Dingen, Zahlen oder Bildern von Mustern kann an einem alltäglichen Beispiel illustriert werden. Wie merkt man sich die Telefonnummer 585858? Indem man sie in drei gleiche Zweierpakete aufteilt: 58 58 58. Die Aufteilung 585 858 bietet sich in diesem Fall weniger an.

Muster in der Mathematik

Muster werden in der Mathematik als zentral angesehen. Damit sind oft auch Erfindungsreichtum und Entdeckungsfreude (nach bestimmten Mustern) eingeschlossen. Allgemein ist der Umgang mit Mustern in der Mathematik essenziell. Häufig sucht man explizit nach Mustern, um eine Regel, eine Aufgabe zu verstehen und einen Sinn darin zu finden. Nicht nur in der Mathematik, auch im alltäglichen Leben erhalten Regelmässigkeiten eine besondere Aufmerksamkeit.
Häufige Muster in der Mathematik sind geometrische und arithmetische. Es gibt aber auch Muster, die nicht auf expliziten Anordnungen beruhen. Auch in Problem- oder Sachaufgaben ist der Umgang mit Mustern – identifizieren und beschreiben – gefordert. Um eine Lösung für eine Aufgabe zu finden, sind auch bei nicht expliziten Mustern die Schritte des Verstehens, des Präzisierens und des Strukturierens notwendig.
Nebst Anwendungssituationen, die mit einem mathematischen Blick betrachtet werden, sind auch Identifikation und Beschreibung von Mustern in weiteren Bereichen des mathematischen Denkens und Lernens elementar.
Als Beispiel sei hier die Mustererkennung in der Diversität von möglichen (halb-)schriftlichen Rechenstrategien genannt, welche die Suche nach einer möglichst effektiven Lösungsstrategie erleichtern.

Muster im (Mathematik-)Unterricht

Je nach Schulstufe wird mit anderen Mustern beziehungsweise anderem Schwierigkeitsgrad bezüglich Muster gearbeitet. Die Frage dabei sollte auch den Zugang zur mathematischen Struktur erlauben: Es ist auf jeder Schulstufe nötig, die angebotenen Muster begründen zu können, auch wenn im Unterricht nicht immer alles zwingend begründet werden muss.
Vor allem in der Grundschulmathematik soll, auch bei der Mustererkennung, induktiv – also vom Einzelnen zum Allgemeinen hinführend – vorgegangen werden. Dabei ist die Beschäftigung mit Mustern und Strukturen ein allgemeiner Zugang zur Mathematik und unterstützt die Idee der Verallgemeinerungen in diesem Fach.
In der Mathematik, aber auch in allen anderen Unterrichtsfächern, können Muster nicht nur inhaltlich bestehen und vermittelt werden (zum Beispiel ein Zahlenmuster in der Mathematik, ein Harmoniemuster in der Musik, ein Satzmuster im Deutschunterricht, ein Bewegungsmuster im Sport), sondern auch methodisch. Die Arbeits- und Vorgehensweisen in den verschiedenen Unterrichtsfächern können Muster enthalten, die einer transparenten Arbeitsanleitung dienen und das allgemeine Verständnis aktiv erschliessen.
Es gibt also die inhaltliche, die soziale und die psychologische Komponente in Bezug auf ein Muster.

Muster erkennen und sehen

Die Mustererkennung geschieht in einem ersten Schritt intuitiv. Die Schülerinnen und Schüler versuchen, die gegebene Anordnung des Ganzen und die Regelmässigkeiten darin zu sehen und noch nicht zu beschreiben. Dabei ist eine bewusste Anordnung von einer beliebigen zu unterscheiden. Die Schülerinnen und Schüler sehen, wo ein Muster vorhanden ist und wo keines zu finden ist. Das Kriterium eines Musters ist hierbei die Rekonstruierbarkeit.

Muster fortsetzen und nutzen

Nach dem blossen Erkennen des Musters, erkennen die Schülerinnen und Schüler auch die Regeln dahinter. Die Mustereinheiten, die Strukturen, werden identifiziert und in kleine und grosse Einheiten gegliedert. Das Muster können die Schülerinnen und Schüler so wiederholen und, in einem nächsten Schritt, variieren. Die handlungsorientierte Beschreibung steht bei der Fortsetzung eines Musters im Zentrum. Oftmals geschieht diese Beschreibung ebenfalls intuitiv. Häufig ist dabei der erste Eindruck prägend, Details werden vorläufig ausgelassen. Bei der Aufgabenstellung ist Folgendes zu bedenken: Eine längere Zahlenfolge lässt oftmals andere Regeln vermuten oder offensichtlich erscheinen als ein kurzer Ausschnitt davon.
Beispiel einer kurzen und längeren Zahlenfolge:

1 2 3 verglichen mit 1 2 3   7 8 9   13 14 15   19 20 21

Mit diesem Wissen lässt sich die Mustererkennung und -fortsetzung steuern. Wichtig dabei sind das Versuchen und Tüfteln, das sich Irren und das systematische Probieren in der Tätigkeit des Musterforschens. Es kann gut sein, dass Kinder (und auch Erwachsene) sich zuerst auf irrelevante Eigenschaften eines Musters konzentrieren, bevor sie Schritt für Schritt die korrekte Struktur des Musters erkennen.

Muster nachzeichnen und vergleichen

Eine genaue Analyse, auch in Sequenzen, ist beim Nachzeichnen von Mustern zentral. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler ihren Blick immer wieder auf das Ganze richten, um den Überblick über das Muster nicht zu verlieren. Sich dem Zoom für Detailblicke bewusst sein, hilft, das Muster von Weitem anzuschauen. Das Nachzeichnen und Vergleichen von Mustern ist eine wichtige Voraussetzung, dass Regelmässigkeiten überhaupt erkannt werden können.

Muster beschreiben und rekonstruieren

Den Schülerinnen und Schülern können geeignete Hilfsmittel für die mündliche oder schriftliche Beschreibung von gefundenen Mustern geboten werden, welche die Strukturen illustrieren; möglicherweise auch auf eine andere, weitere Art als in der Aufgabenstellung erwähnt. Auf dieser Grundlage lassen sich Muster rekonstruieren. Die Beschreibung lässt eine gewisse Distanz zu, damit das Muster auch objektiv, von einer anderen Person, welche das Muster nicht kennt oder sieht, nachvollzogen werden kann. So wird das Muster und dessen Beschreibung für ein aktives Mathematiktreiben nutzbar. Beschreibungsmittel sind einerseits abhängig von der Fragestellung, andererseits vom Abstraktionsgrad der Aufgabe.

Muster begründen und erklären

An diesem Punkt angelangt, geht es darum, das erkannte, fortgesetzte, nachgezeichnete und beschriebene Muster zu begründen. Die Schülerinnen und Schüler tauchen bei diesem Schritt tiefer in das mathematische Muster ein und argumentieren, wie es zu einem Muster gekommen ist und was dieses Muster, in welchem Kontext, zu bedeuten hat. Schliesslich wird das Muster verallgemeinert.

Diese Aktivitäten (siehe Überschriften) im Bereich mathematischer Muster ist mehr als ein Beobachtungsschema für Lernprozesse. Diese Arbeitsschritte können als Leitfaden für den Unterricht genutzt und zu einer Art «Check-Liste» gemacht werden. Wenn die (mathematischen) Muster für Schulkinder (noch) nicht erklärbar sind, dann fällt die Muster-Begründung weg oder wird an die jeweilige Aufgabe angepasst.

Muster im Lehrplan 21

Im Mathematikunterricht geht es um die Erforschung von Mustern und um deren Nutzung beim Lösen von Aufgaben. Im Lehrplan 21 wird in allen drei aufgeführten Bereichen auf Muster verwiesen: Im Bereich «Zahl und Variable» heisst es in der ersten übergeordneten Kompetenz: «Die Schülerinnen und Schüler können Zahl- und Operationsbeziehungen sowie arithmetische Muster erforschen und Erkenntnisse austauschen.» Später wird auch auf die dafür geeigneten Hilfsmittel (Anschauungsmaterial wie 20er-Feld oder Plättchen) und deren Einsatz bei der Muster-Erforschung verwiesen.
Im Bereich «Form und Raum» wird die Teilkompetenz dem ersten Zyklus zugeordnet und bezieht sich auf einfachere Muster mit verschiedenen Figuren: «Die Schülerinnen und Schüler können sich Muster mit drei verschiedenen Figuren einprägen, diese weiterführen und eigene Muster bilden (z. B. Kreis, Dreieck, Quadrat).»
Im Bereich «Grössen, Funktionen, Daten und Zufall» wird ebenfalls im ersten Zyklus auf Muster in Sachaufgaben verwiesen: «Die Schülerinnen und Schüler können in Sachsituationen Anzahlen, Muster und Ordnungen vergleichen (mehr, weniger, gleichviel, länger, kürzer, gleichlang).»
Wichtig dabei ist, den Blick nicht auf die aufgelisteten in Klammern angegebenen Beispiele zu fixieren, sondern in Bezug auf Muster verschiedene Hilfsmittel auszuprobieren und die illustrierenden Möglichkeiten auszuweiten.

Beispiel-Aufgabe

Bereits das Verfahren einer schriftlichen Multiplikationsaufgabe enthält mathematische Strukturen, welche wiederum auf mathematischen Eigenschaften der Operation (Kommutativität, Assoziativität, Distributivität) beruhen.

37037 • 3 = 111'111

Für die Schülerinnen und Schüler ist dieses Resultat (eine Schnapszahl), zu welchem sie mithilfe methodischer, mathematischer Strukturen gekommen sind, wahrscheinlich überraschend.
Wenn nun die Multiplikation in einen weiteren Zusammenhang gestellt wird, ergeben sich zusätzliche Strukturen und Muster:

37037 • 3 = 111'111
37037 • 6 = 222'222
37037 • 9 = 333'333
37037 • 12 = 444'444
…

Die Aufgabe wird so erweitert. Es geht nicht mehr nur um die Berechnung der Produkte, sondern auch um das Entdecken von Beziehungen zwischen den Multiplikationen und ihren Produkten.
So lohnt es sich bei derartigen Aufgaben, nach dem «Warum» zu fragen und gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Muster zu begründen. Wichtig ist auch, die verschiedenen Inhaltsbereiche in der Mathematik auf Muster hin zu vergleichen und immer wieder auf bereits bekannte Muster und Strukturen zu verweisen.

«Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger.»

David Hilbert (Mathematiker, 1862–1943)